Bài 3: MỘT SỐ DẠNG PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC ĐƠN GIẢN

1. Phương trình bậc nhất và bậc hai đối với một hàm số lượng giác:

Phương pháp: Ta chọn một biểu thức lượng giác thích hợp có mặt trong phương trình làm ẩn phụ và quy về phương trình bậc nhất hoặc bậc hai đối với ẩn phụ đó (có thể nêu hoặc không nêu kí hiệu ẩn phụ).

a) Phương trình bậc nhất đối với một hàm số lượng giác:

Ví dụ 1: Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{3}\tan 2x + 3 = 0$

b) $\cos(x + 30°) + 2\cos^2 15° = 1$

Giải

c) $\sqrt{3}\tan 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow \tan 2x = \frac{-3}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \tan 2x = -\sqrt{3} \Leftrightarrow \tan 2x = \tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

$$\Leftrightarrow 2x = -\frac{\pi}{3} + k\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}$$

a) $\cos(x + 30°) + 2\cos^2 15° = 1$

$$\Leftrightarrow \cos(x + 30°) = 1 - 2\cos^2 15° \Leftrightarrow \cos(x + 30°) = \cos 150°$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + 30° = 150° + k360° \\ x + 30° = -150° + k360° \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 120° + k360° \\ x = -180° + k360° \end{array}\right.$$

Chú ý: Khi gặp những bài toán giải phương trình lượng giác mà x là số đo độ của các góc (cung) lượng giác (như ở ví dụ b), ta lưu ý sử dụng kí hiệu số đo độ trong "công thức nghiệm" cho thống nhất, chẳng hạn ta viết $x = 120° + k360°$ **chứ không viết $x = 120° + k2\pi$.**

b) Phương trình bậc hai đối với một hàm số lượng giác:

Ví dụ 2: Giải các phương trình sau

a) $2\sin^2 x + 5\sin x - 3 = 0$ (1)

b) $\cot^2 3x - \cot 3x - 2 = 0$ (2)

c) $2\cos 2x + 2\cos x - \sqrt{2} = 0.$ (3)

Giải:

a) Đặt $t = \sin x\ (-1 \le t \le 1)$

Phương trình (1) trở thành: $2t^2 + 5t - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -3 (\text{loại}) \\ t = \frac{1}{2} (\text{nhận}) \end{array}\right.$

Do đó: $2\sin^2 x + 5\sin x - 3 = 0 \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \sin x = \sin\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right.$$

Vậy phương trình đã cho có các nghiệm $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi$ và $x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi$.

b) Đặt $t = \cot 3x$

Phương trình (2) trở thành: $t^2 - t - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = 2 \end{array}\right.$

Do đó: $\cot^2 3x - \cot 3x - 2 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cot 3x = -1 \\ \cot 3x = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x = \frac{3\pi}{4} + k\pi \\ 3x = \text{arccot}2 + k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{3} \\ x = \frac{1}{3}\text{arccot}2 + k\frac{\pi}{3} \end{array}\right.$$

Vậy phương trình đã cho có các nghiệm là $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{3}$ và $x = \frac{1}{3}\text{arccot}2 + k\frac{\pi}{3}$

c) $2\cos 2x + 2\cos x - \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow 2(2\cos^2 x - 1) + 2\cos x - \sqrt{2} = 0$

$$\Leftrightarrow 4\cos^2 x + 2\cos x - \left(2 + \sqrt{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos x = -\frac{1 + \sqrt{2}}{2} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{4} + k2\pi$$

Vậy phương trình đã cho có các nghiệm là $x = \pm\frac{\pi}{4} + k2\pi$.

***H2/35/SGK: Giải phương trình $5\tan x - 2\cot x - 3 = 0$**

<u>Giải:</u>

ĐKXĐ: $\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sin 2x \neq 0$

Với điều kiện trên, ta có: $5\tan x - 2\cot x - 3 = 0 \Leftrightarrow 5\tan x - 2\frac{1}{\tan x} - 3 = 0$

$$5\tan^2 x - 3\tan x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = 1 \\ \tan x = \frac{-2}{5} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \arctan\left(-\frac{2}{5}\right) + k\pi \end{array}\right.$$

Các nghiệm trên thoả mãn ĐKXĐ nên đều là nghiệm của phương trình.

2) <u>Phương trình bậc nhất đối với sinx và cosx:</u>

***Dạng:** $\text{asinx} + \text{bcosx} = \text{c}\ (a \neq 0\ hoặc\ b \neq 0)$

***Phương pháp giải:** Chia cả hai vế cho $\sqrt{a^2 + b^2}$

***Ví dụ:**

Ví dụ 1: Giải phương trình:

a) $\mathbf{\sqrt{3}sinx - cosx = 1}$. **(1)**

b) $\mathbf{2sin3x + \sqrt{5}cos3x = -3}$ **(2)**

__**Giải:**__

a) $\sqrt{3}\text{sinx} - \text{cosx} = 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\text{sinx} - \frac{1}{2}\text{cosx} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{6}\text{sinx} - \sin\frac{\pi}{6}\text{cosx} = \frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{6}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \pi + k2\pi \end{array}\right.$$

b) $2\text{sin3x} + \sqrt{5}\text{cos3x} = -3$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{2^2 + \left(\sqrt{5}\right)^2}}\text{sin3x} + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2^2 + \left(\sqrt{5}\right)^2}}\text{cos3x} = \frac{-3}{\sqrt{2^2 + \left(\sqrt{5}\right)^2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3}\text{sin3x} + \frac{\sqrt{5}}{3}\text{cos3x} = -1$$

Đặt $\sin\alpha = \frac{2}{3}$ và $\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$. Khi đó (2) $\Leftrightarrow \sin\alpha.\text{sin3x} + \cos\alpha.\text{cos3x} = -1$

$$\Leftrightarrow \cos(3x - \alpha) = -1 \Leftrightarrow 3x - \alpha = \pi + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\alpha + \pi}{3} + k\frac{2\pi}{3}$$

Ví dụ 2: (H4/37/SGK)

Với giá trị nào của m thì phương trình: $\mathbf{2sin3x + \sqrt{5}cos3x = m}$ **có nghiệm?**

__**Giải:**__

Ta có: $2\sin 3x + \sqrt{5}\text{cos3x} = m \Leftrightarrow \frac{2}{3}\sin 3x + \frac{\sqrt{5}}{3}\cos 3x = \frac{m}{3}$ (2)

Đặt $\frac{2}{3} = \cos\alpha, \frac{\sqrt{5}}{3} = \sin\alpha$

Khi đó ta có: (2) $\Leftrightarrow \cos\alpha\sin 3x + \sin\alpha\cos 3x = \frac{m}{3} \Leftrightarrow \sin(3x + \alpha) = \frac{m}{3}$

Vậy với $\left|\frac{m}{3}\right| \leq 1 \Leftrightarrow |m| \leq 3 \Leftrightarrow -3 \leq m \leq 3$ thì phương trình đã cho có nghiệm.

3) Phương trình thuần nhất bậc hai đối với $\sin x$ và $\cos x$

***Dạng:** $a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = 0 \quad (a^2 + b^2 + c^2 \neq 0, a, b, c \in R)$

***Phương pháp giải:**

+ Ta chia cả hai vế cho $\cos^2 x$ (với điều kiện $\cos x \neq 0$) hoặc chia cả hai vế cho $\sin^2 x$ (với điều kiện $\sin x \neq 0$)

*Ví dụ: Giải phương trình: $4\sin^2 x - 5\sin x\cos x + 6\cos^2 x = 0 \quad (1)$

+ $\cos x = 0$.

Khi đó từ (1) ta có: $\sin^2 x = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0$ (vô lí vì $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$).

Do đó các giá trị của x mà $\cos x = 0$ không phải là nghiệm của (1).

+ $\cos x \neq 0$ .Chia cả hai vế của (1) cho $\cos^2 x$, ta được :

$(1) \Leftrightarrow 4\tan^2 x - 5\tan x + 6 = 0$

$$\Leftrightarrow \tan x = 2 \vee \tan x = -\frac{3}{4} \Leftrightarrow x = \arctan 2 + k\pi \vee x = \arctan\left(-\frac{3}{4}\right) + k\pi$$

Vậy các nghiệm của pt (1) là $x = \arctan 2 + k\pi$ và $x = \arctan\left(-\frac{3}{4}\right) + k\pi$.

Chú ý:

***Đối với phương trình dạng:**

$$\mathbf{a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = d \quad (a^2 + b^2 + c^2 \neq 0, a, b, c, d \in R)}$$

***Phương pháp giải:**

+ Cách 1: Viết $d = d(\sin^2 x + \cos^2 x)$ rồi quy về giải phương trình thuần nhất bậc hai đối với $\sin x$ và $\cos x$.

+ Cách 2: Sử dụng công thức hạ bậc, công thức nhân để quy về phương trình bậc nhất đối với $\sin x$ và $\cos x$.

***Ví dụ:** Giải phương trình $\sin^2 x - \sqrt{3}\sin x\cos x + 2\cos^2 x = 1$

Cách 1:

$\sin^2 x - \sqrt{3}\sin x\cos x + 2\cos^2 x = 1$

$\Leftrightarrow \sin^2 x - \sqrt{3}\sin x\cos x + 2\cos^2 x = \sin^2 x + \cos^2 x$

$\Leftrightarrow -\sqrt{3}\sin x\cos x + \cos^2 x = 0$

$\Leftrightarrow \cos(\cos x - \sqrt{3}\sin x) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \cos x = \sqrt{3}\sin x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k\pi \end{array}\right.$$

Vậy các nghiệm của phương trình là $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ và $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$.

Cách 2:

$\sin^2 x - \sqrt{3}\sin x \cos x + 2\cos^2 x = 1$

$$\Leftrightarrow \frac{1 - \cos 2x}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x + 1 + \cos 2x = 1$$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\cos 2x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x = -\frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{6}\cos 2x - \sin\frac{\pi}{3}\sin 2x = \cos\frac{2\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{3} + 2x\right) = \cos\frac{2\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k\pi \end{array}\right.$$

Vậy các nghiệm của phương trình là $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ và $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$.

(**Chú ý:** Hai họ $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ và $x = -\frac{\pi}{2} + k\pi$ là như nhau)

4) Một số ví dụ khác:

Ví dụ: Giải các phương trình:

a) $\sin 2x \sin 5x = \sin 3x \sin 4x$ (1)

b) $\sin^2 x + \sin^2 3x = 2\sin^2 2x$ (2)

c) $\cot 2x = \cot\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ (3)

d) $\tan 3x = \tan x$ (4)

Giải:

a) $\sin 2x \sin 5x = \sin 3x \sin 4x$ (1)

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(\cos 3x - \cos 7x) = \frac{1}{2}(\cos x - \cos 7x)$$

$\Leftrightarrow \cos 3x = \cos x \Leftrightarrow 3x = \pm x + k\pi \Leftrightarrow x = k\pi \vee x = k\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = k\frac{\pi}{2}$

Vậy phương trình (1) có các nghiệm $x = k\frac{\pi}{2}$

b) $\sin^2 x + \sin^2 3x = 2\sin^2 2x$

$\Leftrightarrow \frac{1-\cos 2x}{2} + \frac{1-\cos 6x}{2} = 1 - \cos 4x$

$\Leftrightarrow \cos 2x + \cos 6x = 2\cos 4x$

$\Leftrightarrow 2\cos 4x(\cos 2x - 1) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 4x = 0 \\ \cos 2x = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ 2x = k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{4} \\ x = k\pi \end{array}\right.$

c) $\cot 2x = \cot\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ (3)

Điều kiện xác định: $\begin{cases} \sin 2x \neq 0 \\ \sin(x + \frac{\pi}{2}) \neq 0 \end{cases}$

Với điều kiện đó, ta có:

(3) $\Leftrightarrow 2x = x + \frac{\pi}{2} + k\pi$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

Các giá trị này của x không thỏa điều kiện $\sin 2x \neq 0$.

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

d) $\tan 3x = \tan x$ (4)

Điều kiện xác định: $\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \cos 3x \neq 0 \end{cases}$

Với điều kiện trên, ta có:

(4) $\Leftrightarrow 3x = x + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}$

So với điều kiện, ta có nghiệm của phương trình (4) là $x = k\pi$.